

Des Tableaux de variation interactifs

Pourquoi, comment, démo, discussions

Emmanuel Beffara Martin Bodin Rémi Molinier

Séminaire IREM, 29 novembre 2024

Animateurs de l'IREM

- Emmanuel Beffara, LIG,
- Martin Bodin, Inria,
- Rémi Molinier, Institut Fourier.

Stagiaires

- Wiame Karmouni Tlemcani,
- Tristan Mathon,
- Nathanaël Rasoamanana.

Tableau de variation

x	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{5}}{5}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$+\infty$		
$-10x^2 + 10x - 2$		-	-	0	+	+	0	-
$5x^2 - 1$		+	0	-	-	0	+	+
$f'(x)$		-	-	0	+	+	0	-
$\frac{2x-1}{5x^2-1}$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$+\infty$ ↗ $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ ↗ $-\infty$	$-\infty$ ↘ 0	0		

Selon vous, à quoi sert un tableau de variations ?

Selon vous, à quoi sert un tableau de variations ?
Son rôle dans l'activité de démonstration ?

Les rôles de la preuve (selon Hanna 2000) :

- validation des assertions (vérification, explication)
- communication (présentation systématique des résultats, transmission à une communauté)
- intervient dans le processus de recherche (exploration des conséquences d'une hypothèse, élaboration de conjectures, découverte de résultats).

Les caractéristiques d'une preuve (selon Tymoczko 1979) :

- convaincante
- expertisable
- formalisable

L'enseignement de la preuve est un sujet vaste ...

Un assistant de preuve (ici Coq)

The screenshot shows the Coq proof assistant interface. The main editor contains the following code:

```
Require Import Reals Lra.

Lemma root : forall x, 5 * sqrt(x^2) - 1 = 0 -> x = 1 / 5.
Proof.
  intros x E.
  Search sqrt.
  rewrite sqrt_Rsqrt_abs in E.
  rephrase E as |(x)| = 1/5.
  test (x >= 0).
  - Search |(x)|.
    rewrite Rabs_right in E; auto.
  - rewrite Rabs_left in E; lra.
Qed.

Notation "sqrt x" := (sqrt x) (at level 0) : R_scope.
Notation "|(x)|" := (Rabs x) : R_scope.

Tactic Notation "rephrase" simple_intropattern(
  let H' := fresh "H" in
  assert (H' : P); [ solve [ auto | lra ] | clear H' ]
)
```

The right-hand pane shows a subgoal:

```
1 subgoal
x : R
E : |(x)| = 1 / 5
H : x >= 0
----- (1/1)
x = 1 / 5 \/\ x = -1 / 5
```

The Messages pane at the bottom right lists several lemmas and tactics used during the proof:

```
Rabs_R1: |(1)| = 1
Rabs_no_R0: forall r : R, r < 0 -> |(r)| < 0
Rabs_left: forall r : R, r < 0 -> |(r)| = - r
Rabs_right: forall r : R, r >= 0 -> |(r)| = r
Rabs_left1: forall a : R, a <= 0 -> |(a)| = - a
Rabs_pos: forall x : R, 0 <= |(x)|
Rle_abs: forall x : R, x <= |(x)|
RRle_abs: forall x : R, x <= |(x)|
Rabs_le: forall a b : R, - b <= a <= b -> |(a)| <= b
Rabs_pos_eq: forall x : R, 0 <= x -> |(x)| = x
Rabs_Rabsolu: forall x : R, |( |(x)| )| = |(x)|
Rabs_pos_lra: forall x : R, x >= 0 -> |(x)| = x
```

At the bottom of the window, it says "Ready, proving root" and "Line: 36 Char: 1 Coq is ready 0/0".

Usage expert en informatique :

- élaboration de preuves formelles de propriétés de programmes
- synthèse de programmes certifiés

Usage expert en mathématiques :

- formalisation de corpus mathématiques
- soutien à la démonstration de nouveaux résultats

Usage en enseignement :

- enseignement de « méthodes formelles » dans des cursus d'informatique
- enseignement de la démonstration mathématique (diverses expérimentations en L1-L2)

Cours de math, Novembre 2022, début de M1 : Extensions de corps.

Cours de math, Novembre 2022, début de M1 : Extensions de corps.

- « On applique l'algorithme vu en cours »,
- « On a $\mathbb{Q}(v) \subseteq \mathbb{Q}(a)$ et donc par multiplicité de degré, on a $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(v)][\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}]$ »,

Cours de math, Novembre 2022, début de M1 : Extensions de corps.

- « On applique l'algorithme vu en cours »,
- « On a $\mathbb{Q}(v) \subseteq \mathbb{Q}(a)$ et donc par multiplicité de degré, on a
$$\underbrace{[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]}_{\text{Degré } 3} = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(v)] \underbrace{[\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}]}_{\text{Degré de } P}$$
 »,
- « donc degré de P divise 3 »,

Cours de math, Novembre 2022, début de M1 : Extensions de corps.

- « On applique l'algorithme vu en cours »,
- « On a $\mathbb{Q}(v) \subseteq \mathbb{Q}(a)$ et donc par multiplicité de degré, on a
$$\underbrace{[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]}_{\text{Degré 3}} = \underbrace{[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(v)]}_{\text{Degré de } P} [\mathbb{Q}(v) : \mathbb{Q}] \text{ »,}$$
- « donc degré de P divise 3 »,
- « Ce diagramme commute, donc... ».

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + i, i) & \\ & \nearrow & \uparrow \\ \mathbb{Q}(\sqrt{3} + i) & & \mathbb{Q} \\ & \nwarrow & \\ & & \end{array}$$

Démonstration vs preuve

Argumentation	Démonstration	Preuve
Suite d'arguments (y compris exemples)	Argumentation convaincante pour une communauté	Suite d'arguments se suivant selon des règles prédéfinies

Démonstration vs preuve

Essais,
exemples

Démonstration
sur tableau

Démonstration
rédigée

Formalisation
en Coq



Argumentation

Démonstration

Preuve

Suite d'arguments
(y compris exemples)

Argumentation
convaincante pour
une communauté

Suite d'arguments
se suivant selon des
règles prédéfinies

Des éléments visuels sont utilisés constamment :

- Géométrie,
- Diagrammes d'Euler,
- Analyse de fonctions,
- Diagrammes commutatifs,
- etc.

Avec un rôle illustratif ou démonstratif.

À quoi pourrait ressembler Coq + visuel ?

Fenêtres modales dans des logiciels de preuve

The screenshot shows a software interface with a blue header bar containing navigation tabs: Accueil, Analyse, Réurrence, and Exercice 1. Below the header is a toolbar with various icons. A modal window titled "Somme des premiers entiers" is open, displaying the following text:

Que vaut la somme des 100 premiers entiers ?

La légende veut que le jeune **Carl Friedrich Gauss** ait trouvé la réponse en classe instantanément en élaborant cette formule : $\frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050 \dots$

The modal window contains two columns of text:

<p>Soit P la proposition <i>définie</i> au rang n par $\sum_{k=0}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$</p>	<p><i>définition</i></p>
<p>(1) <i>Quel que soit</i> l'entier naturel n, $P(n)$</p>	<p>➤ <i>à justifier</i></p>
<p>(2) <i>Quel que soit</i> l'entier naturel n, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$</p>	<p>(1) <i>par définition de P</i></p>

At the bottom right of the interface, the text "Reste à justifier : (1)" is visible.

Fenêtres modales dans des logiciels de preuve

The screenshot shows a software interface for a proof assistant. The main window displays a problem titled "Somme des premiers entiers" (Sum of the first integers). The problem text asks for the sum of the first 100 integers and mentions a legend about Carl Friedrich Gauss. A modal window titled "Justification de (1)" is open, showing a list of steps to be justified. The steps are:

- (a) $P(0)$ à justifier
- (b) $P(n)$ hypothèse
- (c) $P(n+1)$ à justifier
- (1) Quel que soit l'entier naturel n , $P(n)$ (a) $n \dots$ (c) par récurrence

The modal window also includes a slider and an "Appliquer" button. Below the modal window, the main window shows the definition of P as a proposition and the formula for the sum of the first n integers:

$$P(n) \text{ la proposition définie au rang } n \text{ par } \sum_{k=0}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Below the formula, there are two rows of text:

- (1) Quel que soit l'entier naturel n , $P(n)$ à justifier
- (2) Quel que soit l'entier naturel n , $\sum_{k=0}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (1) par définition de P

In the bottom right corner of the main window, it says "Reste à justifier : (1)".

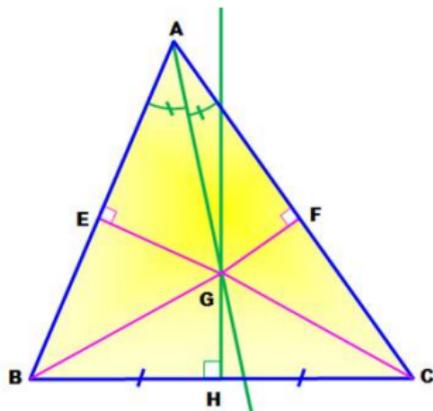
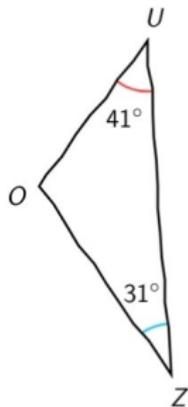
- Lien avec de la preuve,
- Possibilité de faire des preuves totalement textuelles ou presque totalement visuelles,
- Utilisé en licence,
- Simple à prototyper.

- ⊖ Pas simple à prototyper,
- ⊖ Connu comme complexe,
- ⊖ Cabri géomètre, Geogebra, etc. contribuent à des attentes.

Opinion

Coq + géométrie serait radicalement différent de Geogebra.

- Les angles droits ne devraient apparaître droits que si montré.
- Lignes courbes pour manipuler des hypothèses non montrées.



- ⊕ Plus simple à prototyper,
- ⊕ Vus en licence sous forme de révision.
 - Idéal pour les voir dans un autre contexte.

Polytech Grenoble, Février 2023, ~50 étudiant·es :

Donnez le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{2x - 1}{5x^2 - 1}$.

Polytech Grenoble, Février 2023, ~50 étudiant-es :

Donnez le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{2x - 1}{5x^2 - 1}$.

exercice :

Donner le tableau de variation de la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{2x - 1}{5x^2 - 1}$$

Solution

↳ Ensemble de définition

$$5x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow (\sqrt{5}x - 1)(\sqrt{5}x + 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } x \neq -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\mathcal{D}_f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$$

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$ et on a

$$f'(x) = \frac{2(5x^2) - 10x(2x-1)}{(5x^2-1)^2}$$

$$= \frac{10x^2 - 2 - 20x^2 + 10x}{(5x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-10x^2 + 10x - 2}{(5x^2-1)^2}$$

Soit $P(x) = -10x^2 + 10x - 2$

on a $\Delta = 10^2 - 4(-10)(-2) = 20 \Rightarrow x_1 = \frac{-10 - \sqrt{20}}{2(-10)} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$ et $x_2 = \frac{-10 + \sqrt{20}}{2(-10)} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$

d'où $f'(x) = \frac{(x - \frac{5 - \sqrt{5}}{10})(x - \frac{5 + \sqrt{5}}{10})}{(5x^2 - 1)^2}$

$\forall x \in]-\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{10}[\cup]\frac{5 + \sqrt{5}}{10}, +\infty[$, $f'(x) < 0$

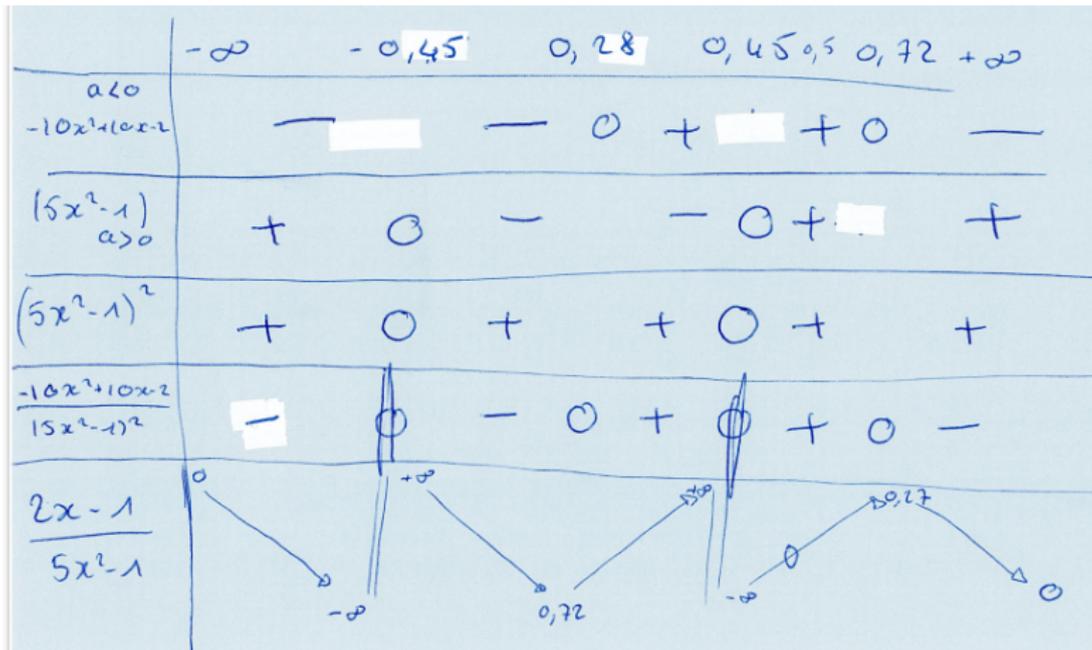
$\forall x \in]\frac{5 - \sqrt{5}}{10}, \frac{5 + \sqrt{5}}{10}[$, $f'(x) > 0$ et $\forall x \in]\frac{5 + \sqrt{5}}{10}, +\infty[$, $f'(x) < 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{10}$	$\frac{5 + \sqrt{5}}{10}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+	-	-
$f(x)$	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow	\searrow

Expérimentation

Polytech Grenoble, Février 2023, ~50 étudiant-es :

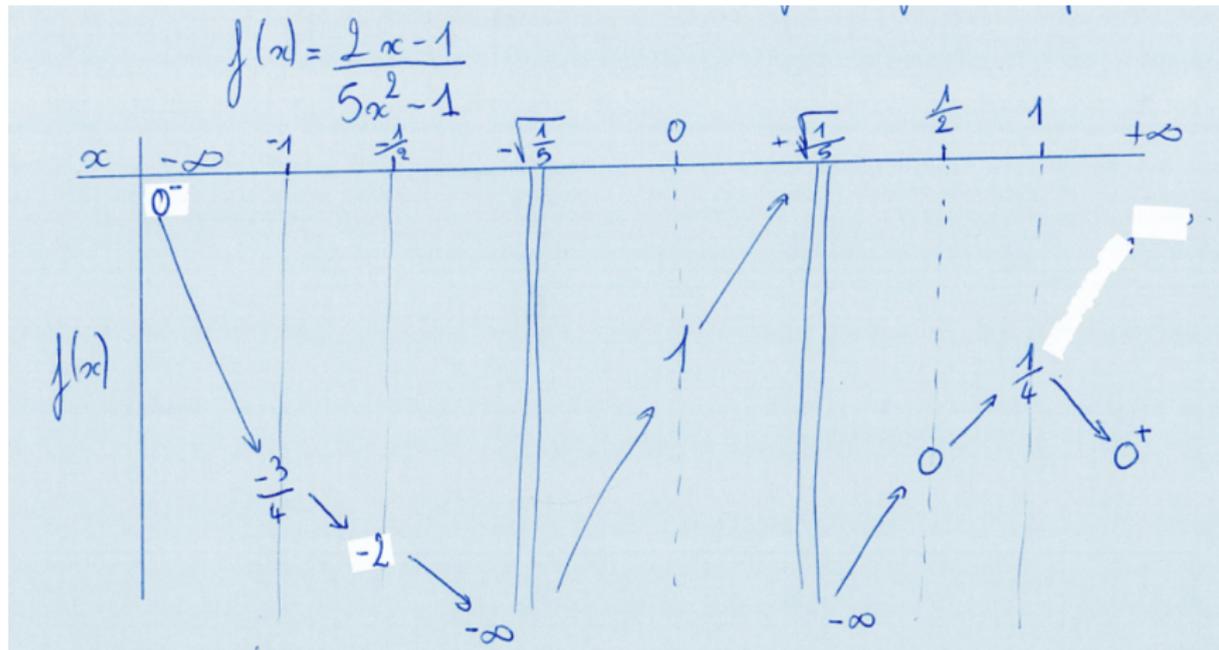
Donnez le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{2x - 1}{5x^2 - 1}$.



Expérimentation

Polytech Grenoble, Février 2023, ~50 étudiant-es :

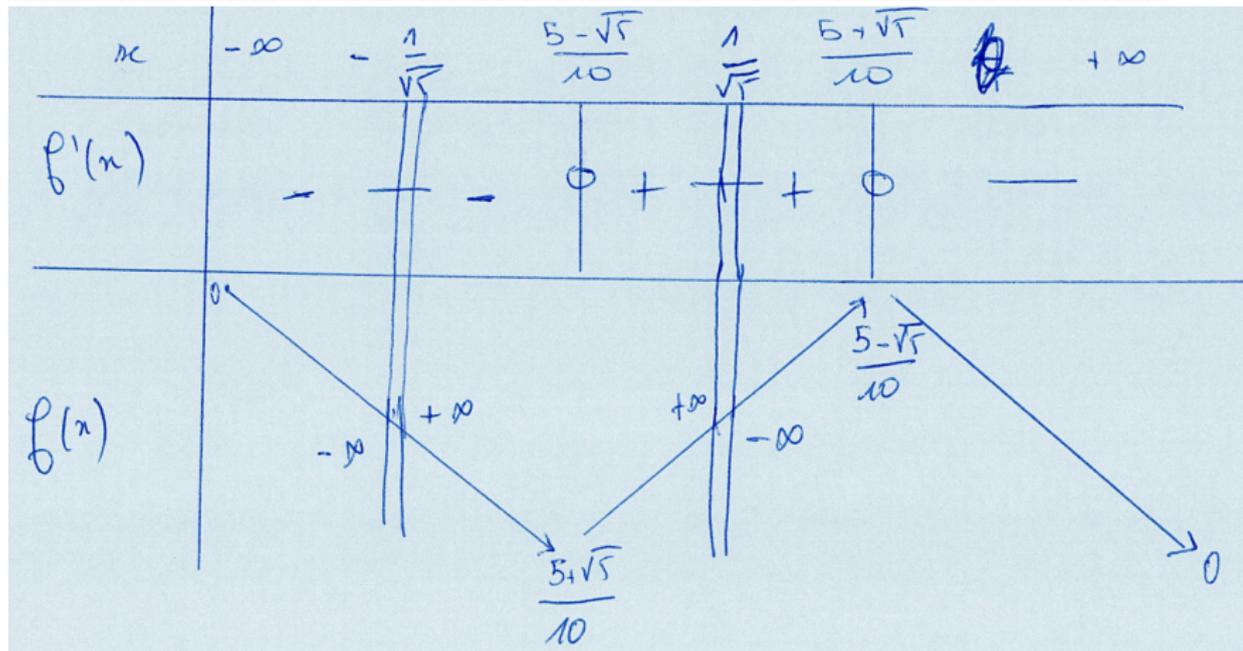
Donnez le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{2x - 1}{5x^2 - 1}$.



Expérimentation

Polytech Grenoble, Février 2023, ~50 étudiant-es :

Donnez le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{2x - 1}{5x^2 - 1}$.



Expérimentation

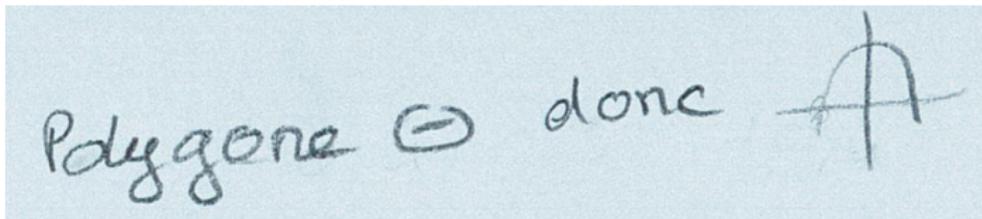
Polytech Grenoble, Février 2023, ~50 étudiant-es :

Donnez le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{2x - 1}{5x^2 - 1}$.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	-	-	
$f(x)$	↘	↘	↗	↘	↘	

Polytech Grenoble, Février 2023, ~50 étudiant-es :

Donnez le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{2x - 1}{5x^2 - 1}$.



```
1 Require Import TabVar.  
2  
3 Definition f x :=  
4 (2 * x - 1) / (5 * x^2 - 1).
```

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	0		
$f'(x)$	$-?$		$-?$

```
1 Eval Compute Deriv f.
```



```
1 (-10*x^2 + 10*x - 2)  
2 / (5 * x^2 - 1)^2
```

↓ ↑ ↘ ↙

...

...

Signes f'(x)

Propriété 6: Signe de division

[-inf ; -3.06[: négatif

[-3.06 ; 1.06]: positif

]1.06 ; +inf[: négatif

Buts à atteindre

Dériver f(x)

Signes f'(x)

Extremums

Signes numérateur

Signes dénominateur

∅
|||
+
-
↗
↙

x	-inf	-3.06	1.06	+inf
$2x^2-10x+4$	-	∅	+	∅
$(x-1)^2$	+			
⊕				

Focalisation : graphique

...

Focalisation : textuel

Propriété 6: Signe de division

[-inf ; -3.06[: négatif OK

[-3.06 ; 1.06]: positif OK

]1.06 ; +inf[: négatif OK

Démo

- Brancher (js)Coq sur le proto,
- Montrer le proto à des enseignant-es et prendre leur retour,
- Traduire un TD en Coq,
- Tester sur des étudiant-es,
- Généraliser à d'autres visualisations.

- 1 Assistants de preuve
- 2 Démonstrations en cours de maths
- 3 Graphisme et assistants à la preuve
- 4 Expérimentation
- 5 Maquettes
- 6 Démo