

Module Langages Formels

TD 4 : Minimisation, nombres et congruences

Exercice 1 Automates finis

Soit L un langage sur Σ reconnaissable par automate fini.

1.1. Montrer que les deux langages suivants sont aussi reconnaissables par automate fini.

$$L_r = \{a_2 a_1 a_4 a_3 \dots a_{2n} a_{2n-1} \mid a_i \in \Sigma, a_1 a_2 \dots a_{2n-1} a_{2n} \in L\}$$
$$L_i = \{a_1 a_3 \dots a_{2n-1} \mid a_i \in \Sigma, a_1 a_2 \dots a_{2n-1} a_{2n} \in L\}$$

1.2. Soit K un langage quelconque sur le même alphabet. Montrer que $K^{-1}L$ est reconnaissable par automate fini.

Exercice 2 Langages rationnels

2.1. Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ . Montrer que les langages suivants sont rationnels.

1. $\text{CYCLE}(L) = \{x_1 x_2, x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2 x_1 \in L\}$
2. $\text{INIT}(L) = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
3. $\text{MAX}(L) = \{x \in L, \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
4. $\text{MIN}(L) = \{x \in L, \text{aucun préfixe propre de } x \text{ n'est dans } L\}$
5. $\bar{L} = \{x, \bar{x} \in L\}$
6. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$
7. $\text{SQRT}(L) = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}$

2.2. Montrer que pour un langage L rationnel le langage suivant n'est pas nécessairement rationnel.

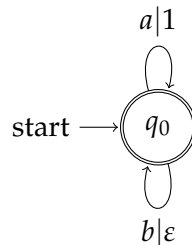
$$\text{BORD}(L) = \{w \in \Sigma^*, \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz \text{ et } xyz \in L\}$$

Exercice 3 Automates et nombres

On a vu au TD2 un automate reconnaissant les mots multiples de 3 en base 2.

3.1. Peut-on généraliser au cas des mots multiples de k en base b , où k et b sont des entiers quelconques ?

On définit (informellement) un transducteur de la façon suivante : dans le graphe d'un automate, on ajoute sur les transitions, en plus des lettres d'un alphabet d'entrée Σ , des mots d'un alphabet de sortie Γ . Un transducteur peut donc représenter une fonction de Σ^* dans Γ^* (ou plus généralement $\mathcal{P}(\Gamma^*)$). Par exemple, le transducteur suivant compte (en unaire !) le nombre de a dans un mot sur $\{a, b\}$.



3.2. Donner un transducteur qui calcule la division entière par 3 d'un nombre écrit en binaire.

3.3. Peut-on généraliser à la division par k en base b ?

3.4. L'ensemble des codages des puissances de 2 en base 2 est-il reconnaissable par un automate sur $\{0, 1\}$? Et les puissances de 3 en base 2 ?

Exercice 4 Caractérisation de Nérode

Définition : Congruences

Une relation d'équivalence \equiv est une **congruence à droite** ssi $\forall t \in \Sigma^*, u \equiv v \Rightarrow ut \equiv vt$. C'est une **congruence à gauche** ssi $\forall t \in \Sigma^*, u \equiv v \Rightarrow tu \equiv tv$. On parle de **congruence** si elle est compatible à droite et à gauche.

Une congruence est **d'index fini** ssi l'ensemble de ses classes d'équivalence est fini.

Nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème (Myhill-Nérode) :

Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1. L est rationnel.
2. L est une union de classes d'une congruence d'index fini.
3. L est une union de classes d'une congruence à droite d'index fini.
4. La relation \sim_L définie par $u \sim_L v \Leftrightarrow \forall t \in \Sigma^*(ut \in L \Leftrightarrow vt \in L)$ est une congruence à droite d'index fini.

4.1. $1 \Rightarrow 2$ Soit un langage L rationnel, reconnu par un automate fini déterministe complet $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. On définit $u \sim_A v$ par $\forall q \in Q, \delta(q, u) = \delta(q, v)$.

4.1. 1. Montrer que \sim_A est une congruence.

On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{l} \Sigma^* / \sim_A \rightarrow Q^Q \\ \bar{u}^A \mapsto (q \mapsto \delta(q, u)) \end{array}$$

4.1. 2. Montrer que φ est injective. En déduire que \sim_A est d'index fini, et que L est l'union de certaines de ses classes d'équivalence.

4.2. 3 \Rightarrow **4**

Soit \equiv la congruence à droite d'index fini donnée par hypothèse. On sait que $L = \bigcup_{x \in X} \bar{x}$.

4.2. 1. Montrer que \sim_L est une congruence à droite.

4.2. 2. Montrer que $\forall u, v \in \Sigma^*, u \equiv v \Rightarrow u \sim_L v$. En déduire que \sim_L est d'index fini.

4.3. 4 \Rightarrow **1**

On suppose que \sim_L est une congruence à droite d'index fini, montrer que $u \sim_L v \Leftrightarrow u^{-1}L = v^{-1}L$. En conclure que L est rationnel.

4.4. Utiliser le théorème de Myhill-Nérode pour montrer que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel.

Exercice 5 Nérode et le monoïde syntaxique

Nous allons maintenant faire le lien entre la caractérisation de Nérode et la notion de monoïde syntaxique vue en cours.

5.1. Lorsque L est rationnel, faire le lien entre \sim_L et l'automate minimal reconnaissant L .

5.2. Si \equiv est une congruence, montrer que l'on peut obtenir un monoïde en quotientant Σ^* par \equiv .

5.3. On définit la congruence \equiv_L par

$$u \equiv_L v \iff (\forall t, s \in \Sigma^*, tus \in L \Leftrightarrow tvs \in L)$$

Montrer que L est reconnaissable si et seulement si son monoïde syntaxique est fini, et dans ce cas montrer qu'il est isomorphe au monoïde de transition de l'automate minimal.