Module Langages Formels
TD 7 : Langages Algébriques et Automates à Pile

Exercice 1 `Commençons par bricoler des automates.`

Donner des automates à pile reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{u \in \{a,b\}^* |\ |u|_a = |u|_b\}$
2. $L_2 = \{u \in \{a,b\}^* |\ |u|_a \geqslant |u|_b\}$
3. $L_3 = \{u \in \{a,b\}^* |\ |u|_a = 2 \cdot |u|_b\}$
4. $L_4 = \{u\#\overline{v}|\ u,v \in \{0,1\}^* \ \wedge\ \exists i \in \mathbb{N},\ u = (i)_2 \ \wedge\ v = (i+1)_2\}$ où $(n)_2$ est l'écriture de n en binaire.

Exercice 2 `Clôture par union dénombrable ?`

Soit $\Sigma = \{a,b\}$ et n un entier positif.

2.1. Donner un automate à pile déterministe qui reconnaisse le langage

$$L_n = \{a^m b^k a^m b^k |\ m \geqslant 1 \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

2.2. Le langage $L = \bigcup_{n \geqslant 1} L_n$ est-il algébrique ?

Exercice 3 `Clôture par complémentaire ?`

Montrer que le langage $L = \{ww|\ w \in \{a,b\}^*\}$ n'est pas algébrique alors que son complémentaire l'est. Donner un automate à pile.

Exercice 4 `Langages algébriques sur un seul caractère`

Montrer que tout langage algébrique L sur l'alphabet $\{a\}$ est rationnel.

► *On pourra montrer qu'il existe N_0 et p tels que pour tout mot w, si $|w| \geqslant N_0$, alors $w(a^p)^* \subseteq L$.*